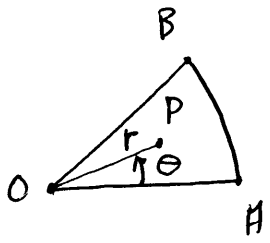
Ex 1 : $J_{(\Delta)}(\text{hélice}) = 4\, J_{(\Delta)}(1/\text{pale})$



Coordonnées polaires : $P(r,\theta)$

m masse d'une pale de masse surfacique $\sigma = \frac{m}{S}$ (σ : homogène)

avec $S = \int_0^R \int_0^\alpha dr\, r\, d\theta$ car $dS = dr\, r\, d\theta$

donc $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$ donc $\sigma = \frac{2m}{R^2 \alpha}$

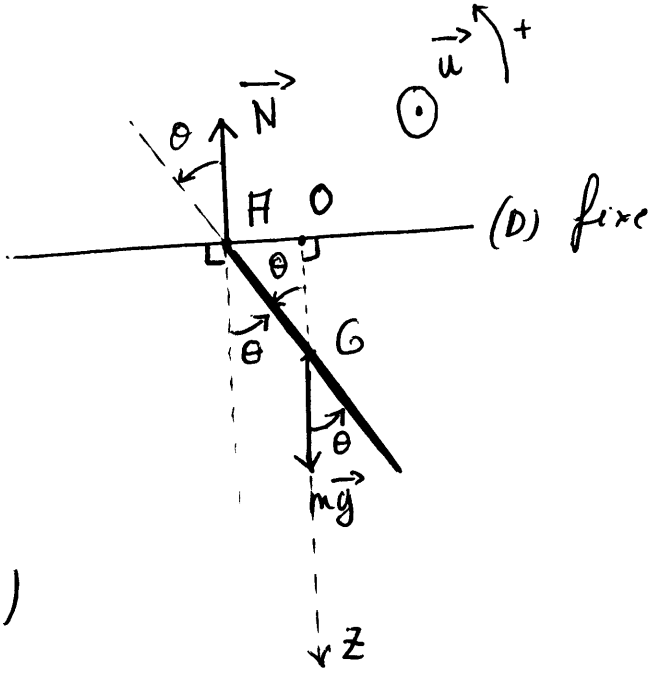
Par définition de J : $J_{(\Delta)}(1/\text{pale}) = \iint_{P \in \text{pale}} \sigma(P)\, dS(P)\, OP^2 = \sigma \iint r^3\, dr\, d\theta$

donc $J_{(\Delta)}(1/\text{pale}) = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^\alpha d\theta = \frac{2m}{R^2\alpha} \frac{R^4}{4} \alpha = \frac{1}{2} m R^2$

Rmq : On retrouve le même J que celui d'un disque : cela est normal car dans une pale la répartition de la masse par rapport à O est la même que dans le disque.

ainsi $J_{(\Delta)}(\text{hélice}) = 2 m R^2$

Ex 2 : a) forces sur la barre :



- $\vec{N}$ force de (D) sur la barre, pt d'application H
- $\vec{T}$ force de frottement de (D) sur la barre : $\vec{T} = \vec{0}$ (énoncé)
- $m\vec{g}$ poids

Résultante des forces sur la barre $\vec{R} = \sum \vec{f}_{ext} = \vec{N} + m\vec{g}$

donc $\vec{R}$ verticale. Principe fondamental de la dynamique dans le réf. du laboratoire, galiléen, $\vec{R} = m\,\vec{a}(G)$ ①

donc l'accélération de G est verticale, donc $\vec{v}(G) = \int \vec{a}(G)\,dt + \vec{v}_0$

est aussi vertical car $\vec{v}_0 = \vec{v}(G \text{ à } t=0) = \vec{0}$

Rmq: Soit O la projection de G sur (D), G reste sur la droite verticale passant par O. Et H se déplace sur (D).

b) Soit (Oz) axe vertical vers le bas : $z_G = \frac{\ell}{2}\cos\theta \quad > 0$

$$\vec{v}(G) = \dot{z}_G\,\vec{u}_z = -\dot{\theta}\,\frac{\ell}{2}\sin\theta\,\vec{u}_z$$

$$\vec{a}(G) = \ddot{z}_G\,\vec{u}_z = -\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\frac{\ell}{2}\,\vec{u}_z$$

l'éq. ① s'écrit donc: $-N + mg = -\frac{m\ell}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$ ②

avec $\vec{N} = -N\,\vec{u}_z \quad (N>0)$ et $m\vec{g} = mg\,\vec{u}_z$

Rmq: Le Thé du moment cinétique ne peut pas être appliqué en H car H n'est pas fixe dans (R); mais on peut l'appliquer en G dans (R), ainsi:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \underbrace{\vec{GG}}_{\vec{0}} \wedge m\vec{g} + \vec{GH} \wedge \vec{N} = GH \times N \sin(-\theta)\,\vec{u}$$

$$= -z_G\,N\,\vec{u} = -\frac{\ell}{2}\,N\sin\theta\,\vec{u} \qquad ③$$

avec $\vec{u}$ vecteur unitaire ⊥ au plan du mouvement, dont le sens est compatible avec le sens direct ($\theta > 0$) dans le plan du mouvement (voir Figure). La force $\vec{N}$ fait tourner la barre dans le sens indirect donc

$\overrightarrow{L_G}$ = $\overrightarrow{L^*}$ (barre)

↑ dans (R) ↑ barycentrique

dans le réf. barycentrique (R^*) la barre tourne autour d'une axe fixe passant par G : $(G,\vec{u})$ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$

donc $L^*_{(G,\vec{u})} = I_{(G,\vec{u})}\,\dot{\theta} = \frac{1}{12} m \ell^2 \dot{\theta}$

le mouvement de la barre est plan donc $\overrightarrow{L^*} \parallel \vec{u}$

ainsi $\overrightarrow{L^*} = (\overrightarrow{L^*}.\vec{u})\,\vec{u}$ or $\overrightarrow{L^*}.\vec{u} = L^*_{(G,\vec{u})}$

donc $\overrightarrow{L^*} = \frac{1}{12} m \ell^2 \dot{\theta}\,\vec{u}$

D'après ③ : $\frac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\theta} = -\frac{\ell}{2} N(\sin\theta)$

avec ② on obtient : $\frac{1}{6} \ell\,\ddot{\theta} = -g\sin\theta - \ell\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\sin\theta$ ④

Equation différentielle du mouvement de la barre ↗

c) Par l'énergie :

(puissance ↙)

$\vec{N} \perp \vec{v}(A)$, donc $\vec{N}$ ne travaille pas $\Rightarrow \mathcal{P}(\vec{N}) = 0$

$m\vec{g}$ travaille $\mathcal{P}(m\vec{g}) = m\vec{g}\cdot\vec{v}(G) = mg\,\dot{z}_G$

$\mathcal{P}(m\vec{g}) = -mg\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta$ ⑤

L'énergie cinétique de la barre est donnée par le th. de Kœnig :

E_c (dans (R)) $= \frac{1}{2} m V(G)^2 + E_c^*$ avec $E_c^* = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$ (↑ barycentrique)

($V(G)^2 = \dot{z}_G^2$)

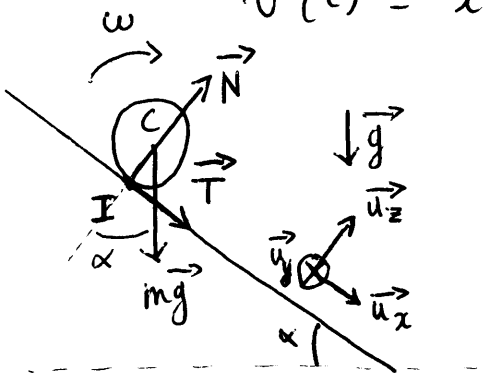
donc $E_c = \frac{1}{2} m \left(\dot{\theta}\frac{\ell}{2}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$

Ex 3. Roue sur un plan incliné

3.1.

Le mouvement de C est sur une droite, soit $x = x_C$:

$\vec{v}(C) = \dot{x}\,\vec{u_x}$ et $\vec{a}(C) = \ddot{x}\,\vec{u_x}$ → (mvt rectiligne)



forces ext. sur la roue :

- $m\vec{g}$ pt d'application $G \equiv C$
- force sol sur roue $\begin{cases} \cdot \vec{N} & // \\ \cdot \vec{T} \text{ (frottement)} & // \end{cases}$

$I : \vec{N} = N\vec{u_y}$

$I : \vec{T} = T\vec{u_x}$

Dans (R), réf du plan, galiléen, $\sum \vec{f}_{\text{ext sur roue}} = m\vec{a}(G)$

donc $\vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}(G) \iff \begin{cases} N - mg\cos\alpha = 0 & (1) \\ T + mg\sin\alpha = m\ddot{x} & (2) \end{cases}$

Soit $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané de la roue $\vec{\Omega} = \omega\,\vec{u_y}$

Le th du moment cinétique par rapport à l'axe (Cy) s'écrit : (C centre de masse)

$$\frac{d}{dt}L_{(Cy)} = \left(\underbrace{\vec{CC} \wedge m\vec{g}}_{=\vec{0}} + \vec{CI} \wedge \vec{T} + \underbrace{\vec{CI} \wedge \vec{N}}_{=\vec{0} \text{ car } //} \right) \cdot \vec{u_y}$$

$$= -b\,T\,\underbrace{\vec{u_y} \cdot \vec{u_y}}_{1} \quad \text{avec } \vec{T} = T\vec{u_x} \text{ et } \vec{CI} = -b\vec{u_z}$$

or $L_{(Cy)} = L^*_{(Cy)} = J_{(Cy)}\,\omega$ car dans (R^*) la roue tourne autour de (Cy) à la vitesse angulaire ω.

donc $\frac{1}{2}mb^2\dot{\omega} = -bT$ (3)

Les relations (1), (2) et (3) sont valables dans le cas a) sans glissement et dans le cas b) avec glissement.

3.1.a) Sans glissement : $\vec{v}_g(I) = \vec{0} \Rightarrow$ frottement en I statique /6

↳ $|T| \leq f N$ $(N>0)$

$\vec{v}_g(I) = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)$ (4)

avec I_1 (et I_2) le pt de la roue (du sol) qui coïncide à l'instant t avec I.

Le sol est fixe donc $\vec{v}(I_2) = \vec{0}$, donc sans glissement $\vec{v}(I_1) = \vec{0}$

I_1 et C ∈ roue (solide indéformable) donc $\frac{d\vec{I_1C}}{dt} = \vec{v}(C) - \vec{v}(I_1) = \vec{\Omega} \wedge \vec{I_1C}$

$\Leftrightarrow \vec{v}(C) = \omega b \vec{u}_x$

donc sans glissement $\dot{x} = \omega b$ (5) $\Rightarrow \ddot{x} = \dot{\omega} b$

D'après (3) $T = -\frac{1}{2} m b \dot{\omega} = -\frac{1}{2} m \ddot{x}$ (6)

en remplaçant dans (2) : $\ddot{x} \frac{3}{2} m = mg \sin\alpha \Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin\alpha$ (7)

c'est un mouvement uniformément accéléré : $\dot{x} = t \frac{2}{3} g \sin\alpha$ car $v_{initial} = 0$

et $x = \frac{1}{3} t^2 g \sin\alpha$ car $x_{initial} = 0$

La distance à parcourir est $\ell = h/\sin\alpha$

donc le temps de descente est $\tau = \sqrt{\frac{3h}{g \sin^2\alpha}}$

Il n'y a pas de glissement ssi $|T| \leq f N$

or $N \overset{(1)}{=} mg\cos\alpha$ et $T \overset{(6)}{=} -\frac{1}{2} m \ddot{x} \overset{(7)}{=} -\frac{1}{3} g m \sin\alpha$

donc la condition s'écrit : $\frac{1}{3} g m \sin\alpha \leq f mg \cos\alpha$

↕ de non-glissement

$\Leftrightarrow \tan\alpha \leq 3f$ (8)

3.1.b) Avec glissement : $\vec{v_g}(I) \neq 0 \Rightarrow$ frottement dynamique

donc $|T| = fN \overset{①}{=} mg\cos\alpha$ donc $T = \pm mgf\cos\alpha$

$\vec{T}$ est opposé à $\vec{v_g}$ donc, pour choisir entre "+" et "−", il faut déterminer $\vec{v_g} = \vec{v}(I_1) = \vec{v}(C) - \vec{\Omega}_{1/I_1} \wedge \vec{I_1C} = (\dot{x} - \omega b)\vec{u_x}$ ⑨

($\frac{d\vec{I_1C}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{I_1C}$)

D'après ② $\ddot{x} = g(\sin\alpha \pm f\cos\alpha) \Rightarrow \dot{x} = gt(\sin\alpha \pm f\cos\alpha)$ car $v_{initial} = 0$

D'après ③ $\dot{\omega} = -\frac{2}{b}(\pm fg\cos\alpha) \Rightarrow \omega = -f\frac{2t}{b}(\pm g\cos\alpha) - 0$ ($\omega_{initial} = 0$)

donc $\vec{v_g} = gt(\sin\alpha \pm 3f\cos\alpha)\vec{u_x}$

Donc si $\vec{T} = +mgf\cos\alpha\,\vec{u} \Rightarrow \vec{v_g} = gt(\sin\alpha + 3f\cos\alpha)\vec{u_x}$ ($mgf\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha + 3f\cos\alpha > 0$)

or il faut que $\vec{T}$ et $\vec{v_g}$ soient en sens contraire donc "+" impossible

Il faut donc que $\vec{T} = -mgf\cos\alpha\,\vec{u_x}$

et $\vec{v_g} = gt(\sin\alpha - 3f\cos\alpha)\vec{u_x}$ ⑩

Ainsi $\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ donc $x(t) = \frac{1}{2}gt^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)$

cdn initial : $\dot{x} = 0$ et $x = 0$

donc la durée pour descendre est $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - f\cos\alpha)}}$

Avec glissement $\vec{v_g} \neq 0$ et de le sens opposé à $\vec{T}$ donc ⑩ $\Rightarrow \sin\alpha - 3f\cos\alpha > 0$

soit $\tan\alpha > 3f$ cette condition est complémentaire de la condition de non-glissement ⑧.

3.2. Voiture qui descend un plan incliné

La voiture roule sans glisser donc pour chaque roue de la voiture la condition (5) est vérifiée : $v_{(A)} = b\omega$

de même $v_{(B)} = v(C) = v(D) = b\omega = v(G)$

avec ω vitesse angulaire des roues

a) L'énergie cinétique d'une roue dans (R) réf du sol est

$$E_c(1\text{ roue}) = \underbrace{\frac{1}{2} m V(A)^2 + \frac{1}{2} J\omega^2}_{\uparrow \text{Königs}} = E_c^*$$

$$= \frac{1}{2} m V(G)^2 + \frac{1}{4} m V(G)^2 = \frac{3}{4} m V(G)^2$$

pour le châssis $E_c = \frac{1}{2} M V(G)^2$

donc $E_c(\text{voiture}) = \left(\frac{1}{2} M + 3m\right) V(G)^2$

b) Th de l'énergie cinétique $\Delta E_c = \sum \text{travaux (forces)}$

les frottements (qui sont $\neq 0$) ne travaillent pas (statique, $v_g = 0$)

donc seul le poids travaille $W(\text{poids}) = (M+4m)\,g\,h$

donc $\left(\frac{M}{2} + 3m\right) V_{f\,\text{final}}^2 - \underbrace{0}_{\downarrow \text{initial}} = (M+4m)\,g\,h$

soit $$V_f = \sqrt{\frac{M+4m}{M+6m}\,2gh}$$